Linear Algebra
[KOMS120301] - 2023/2024

12.2 - Perubahan Basis

Dewi Sintiari

Program Studi Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 12 (November 2023)

Bagian 1: Koordinat ruang vektor umum

Koordinat ruang vektor umum

Definition

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, dan

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Maka skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ disebut vektor koordinat v relatif terhadap basis S.

Vektor $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ dalam $\mathbb{R}^n$ disebut vektor koordinat v relatif terhadap basis S, dan dilambangkan dengan

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

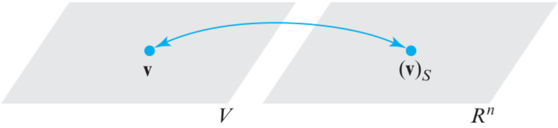
Remark.
Basis S dari ruang vektor V merupakan sebuah himpunan. Ini berarti urutan daftar vektor-vektor tersebut di S umumnya tidak penting.

Untuk mengatasi hal ini, kita mendefinisikan ordered basis atau basis terurut, yang merupakan basis yang urutan pencatatan vektor basisnya sudah ditetapkan.

$\mathbf{v}_S$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$.

Setelah basis terurut S diberikan untuk ruang vektor V, "Teorema Keunikan" membentuk korespondensi satu-ke-satu antara vektor di V dan vektor di $\mathbb{R}^n$.

A one-to-one correspondence



Contoh 1: koordinat relatif terhadap basis standar untuk $\mathbb{R}^n$

Untuk ruang vektor $V = \mathbb{R}^n$ dan S adalah basis standar, vektor koordinat $(\mathbf{v})_S$ dan vektor $\mathbf{v}$ adalah sama;

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$$

Contoh

Untuk $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Representasi vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ dalam basis standar adalah:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Vektor koordinat relatif terhadap basis S adalah $(\mathbf{v})_S = (a, b, c)$ (sama dengan $\mathbf{v}$).

Contoh 2: koordinat vektor relatif terhadap basis standar

Temukan vektor koordinat untuk polinomial:

$$\mathbf{p}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

relatif terhadap basis standar untuk ruang vektor P_n.

Solusi:

Basis standar untuk P_n adalah: $= \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
Jadi, vektor koordinat untuk $\mathbf{p}$ relatif terhadap S adalah:

$$(\mathbf{p})_S = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Temukan vektor koordinat dari:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

relatif terhadap dasar standar untuk M_{22}.

Solution:

The standard basis vectors for M_{22} is:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dengan demikian,

$$B = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, vektor koordinat B relatif terhadap S adalah:

$$(B)_S = (a, b, c, d)$$

Latihan 1

Tunjukkan bahwa himpunan vektor $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ membentuk basis $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1),\ \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0),\ \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

Temukan vektor koordinat $\mathbf{v} = (5, 1 - 9)$ relatif terhadap basis S.

Latihan 1

Tunjukkan bahwa himpunan vektor $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ membentuk basis $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1),\ \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0),\ \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

Temukan vektor koordinat $\mathbf{v} = (5, 1 - 9)$ relatif terhadap basis S.

Solusi:
Pertanyaan 1 dapat dijawab seperti pada materi yang telah dibahas sebelumnya.

Pertanyaan 2: Asumsikan bahwa jawaban dari Pertanyaan 1 adalah bahwa S membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Kita harus mencari nilai c_1, c_2, c_3 sedemikian sehingga:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

atau, dalam hal ini

$$(5, 1 - 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Latihan 1 (*lanjutan*)

Dari sistem:

$$(5, 1 - 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

dapat diekstraksi sistem persamaan linear:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 = 9 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem tersebut, diperoleh hasil berikut. (*Tugas Anda adalah memverifikasi kebenaran jawaban berikut.*)

$$c_1 = 1, \; c_2 = -1, \; c_3 = 2$$

Ini berarti bahwa vektor koordinat $\mathbf{v} = (5, 1 - 9)$ relatif terhadap basis S adalah:

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Latihan 2

Cari vektor $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ yang vektor koordinatnya relatif terhadap $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dimana

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \;\; \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \;\; \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

adalah $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

Solusi:

Notasikan $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 3, 2)$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \\
&= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) \\
&= (11, 31, 7)
\end{aligned}$$

Jadi, vektor yang memiliki koordinat vektor relatif $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$ adalah $\mathbf{v} = (11, 31, 7)$.

Bagian 2: Perubahan basis

Mengapa diperlukan perubahan basis?

- Basis yang cocok untuk suatu masalah belum tentu cocok untuk masalah lain;
- ...?
- ...?

Koordinat pemetaan

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor berdimensi hingga V. Misalkan vektor koordinat $\mathbf{v}$ relatif terhadap S adalah:

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Korespondensi satu-satu (pemetaan) antara vektor-vektor di V dan vektor-vektor di ruang vektor Euclidean $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai;

$$\mathbf{v} \to (\mathbf{v})_S$$

Ini disebut peta koordinat relatif terhadap S dari V ke $\mathbb{R}^n$.

Kita akan menggunakan matriks kolom untuk mewakili vektor koordinat:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Masalah Perubahan Basis

Masalah: Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor dalam ruang vektor berdimensi terbatas V, dan kita mengubah basis V dari basis B ke basis lain B', bagaimanakah vektor koordinat $[\mathbf{v}]_B$ dan $[\mathbf{v}]_{B'}$ terkait?

- Dalam literatur, B biasanya disebut basis lama dan B' disebut basis baru.
- Untuk memudahkan, saya akan menggunakan istilah **first basis** (atau basis pertama) dan **second basis** (atau basis kedua).

Misalkan

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ and } B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

dan vektor koordinat basis kedua relatif terhadap basis pertama adalah:

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ and } [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Dengan kata lain, relasi berikut berlaku:

$$\mathbf{u}'_1 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 \quad (1)$$
$$\mathbf{u}'_2 = c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2 \quad (2)$$

Permasalahan: Diberikan sebuah vektor $\mathbf{v} \in V$, dengan

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Bagaimana menemukan vektor koordinat $\mathbf{v}$ relatif terhadap B?

Misalkan vektor koordinat **v** relatif terhadap B' adalah

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

ini berarti:

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1' + k_2\mathbf{u}_2'$$

Berdasarkan relasi (1) dan (2) pada slide sebelumnya, diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= k_1(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) + k_2(c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2) \\ &= (k_1 a + k_2 c)\mathbf{u}_1 + (k_1 b + k_2 b)\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Jadi, vektor koordinat v relatif terhadap B adalah:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix}$$

Solusi (*lanjutan*): Menemukan matriks transisi

Vektor $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix}$ dapat ditulis sebagai:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{B'}$$

Misalkan $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Artinya:

vektor koordinat $[\mathbf{v}]_B$ dapat diperoleh dengan mengalikan vektor koordinat $[\mathbf{v}]_{B'}$ di sebelah kiri dengan matriks P.

Dengan kata lain:

$$[\mathbf{v}]_B = P\,[\mathbf{v}]_{B'}$$

Teorema

Misalkan V adalah ruang berdimensi n. Misalkan kita ingin mengubah basis V dari basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ke basis lain, yaitu $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$.

Kemudian untuk setiap vektor $\mathbf{v} \in V$, kita mempunyai hubungan antara $[\mathbf{v}]_B$ dan $[\mathbf{v}]_{B'}$ sebagai berikut:

$$[\mathbf{v}]_B = P\ [\mathbf{v}]_{B'}$$

dimana P adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor koordinat B' relatif terhadap B, yaitu kolom-kolom P adalah:

$$[\mathbf{u}'_1]_B,\ [\mathbf{u}'_2]_B,\ \ldots,\ [\mathbf{u}'_n]_B$$

P disebut matriks transisi dari B' ke B, dan dilambangkan dengan $P_{B' \to B}$.

$$P_{B' \to B} = [\ [\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \mid \ \ldots \ \mid [\mathbf{u}'_n]_B\ ] \tag{1}$$

$$P_{B \to B'} = [\ [\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \ \ldots \ \mid [\mathbf{u}_n]_{B'}\ ] \tag{2}$$

Contoh 1: mencari matriks transisi

Diketahui basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ dan $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dimana:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0),\ \mathbf{u}_2 = (0, 1),\ \mathbf{u}'_1 = (1, 1),\ \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$$

1. Temukan matriks transisi $P_{B' \to B}$ dari B' ke B.
2. Temukan matriks transisi $P_{B \to B'}$ dari B ke B'.

Solusi Contoh 1

Solusi 1: Matriks transisi $P_{B' \to B}$ dari B' ke B.

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}'_2 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Dengan demikian,

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solusi Contoh 1 (*lanjutan*)

Solusi 2: Matriks transisi $P_{B \to B'}$ dari B ke B'.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}_2' \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2: menghitung vektor koordinat

Permasalahan:

Diberikan basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ and $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dimana:

$$\mathbf{u}_1 = (1,0),\ \mathbf{u}_2 = (0,1),\ \mathbf{u}'_1 = (1,1),\ \mathbf{u}'_2 = (2,1)$$

Cari vektor $[\mathbf{v}]_B$ jika $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solusi:

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B}[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Apa jadinya jika kita mengalikan $P_{B' \to B}$ dengan $P_{B \to B'}$?

- Pertama-tama kita memetakan koordinat B dari $\mathbf{v}$ ke dalam koordinat B';
- lalu petakan koordinat B' dari $\mathbf{v}$ ke dalam koordinat B;
- Ini menghasilkan $\mathbf{v}$ kembali ke koordinat B.

$$P_{B' \to B} P_{B \to B'} = P_{B \to B} = I$$

Contoh

Baca lagi Contoh 1.

$$(P_{B' \to B})(P_{B \to B'}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Teorema

$P_{B' \to B}$ memiliki invers, dan invers-nya adalah $P_{B \to B'}$.

Prosedur:

1. Bentuklah matriks $[B' \mid B]$;
2. Gunakan operasi baris dasar untuk mereduksi matriks pada Langkah 1 menjadi bentuk eselon baris tereduksi;
3. Matriks yang dihasilkan adalah $[I \mid P_{B \to B'}]$;
4. Ekstrak matriks $P_{B \to B'}$ dari sisi kanan matriks pada Langkah 3.

Diagram:

$$[\text{new basis} \mid \text{old basis}] \xrightarrow{\text{row operations}} [I \mid \text{transition from old to new}]$$

Latihan

Pada Contoh 1, kita diberikan basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ dan $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dimana :

$$\mathbf{u}_1 = (1,0),\ \mathbf{u}_2 = (0,1),\ \mathbf{u}'_1 = (1,1),\ \mathbf{u}'_2 = (2,1)$$

Gunakan diagram pada slide sebelumnya untuk mencari:

1. Matriks transisi dari B' ke B.
2. Matriks transisi dari B ke B'.

Pertanyaan 1. Basis lama adalah B' dan basis baru adalah B. Maka:

$$[B \mid B'] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Karena ruas kiri sudah menjadi matriks identitas, maka tidak perlu dilakukan reduksi. Karena itu,

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pertanyaan 2. Basis lama adalah B dan basis baru adalah B'. Maka:

$$[B' \mid B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dengan mereduksi matriks tersebut diperoleh:

$$[I \mid \text{transition from } B \text{ to } B'] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Latihan

Diberikan basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ dan $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dimana:

$$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (2, -1, 1),\ \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$$

$$\mathbf{u}'_1 = (3, 1, -5),\ \mathbf{u}'_2 = (1, 1, -3),\ \mathbf{u}'_3 = (-1, 0, 2)$$

1. Temukan matriks transisi dari B ke B'.
2. Temukan matriks transisi dari basis standar $\mathbb{R}^3$ ke B.
3. Temukan matriks transisi dari basis standar $\mathbb{R}^3$ ke B'.
4. Carilah vektor koordinat $\mathbf{w}$ relatif terhadap basis B, jika vektor koordinat $\mathbf{w}$ relatif terhadap basis standar S adalah $[\mathbf{w}]_S = (-5, 8, -5)$.

Task

Buatlah sebuah program komputer untuk mengubah vektor 2 dimensi dari satu basis ke basis lainnya.

Spesifikasi program:

1. Dibutuhkan masukan dari pengguna: dua basis B dan B', dan sebuah vektor $\mathbf{v}$ relatif terhadap basis B.
2. Program harus menampilkan koordinat vektor baru yang merupakan koordinat vektor $\mathbf{v}$ relatif terhadap basis B'

bersambung...